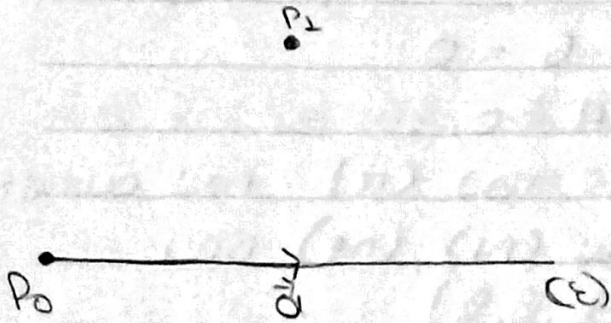


26/04/17



$$(E): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$d(P_2, (E)) = \frac{|\vec{P_0P_2} \times \vec{a}|}{\|\vec{a}\|} = \left| \vec{P_0P_2} \times \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right| (*)$$

Το $(*)$ δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{P_0P_2}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά εμβαδόν παραλληλ.} &= \text{Βάση} \cdot \text{ύψος} \\ &= \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \left(\text{υψος συνόχια} \right) \\ &\quad \left(\text{ορθογώνιο } P_0 \right) \end{aligned}$$

Αρα ο τύπος της απόστασης είναι ανεξάρτητος της επιλογής του P_0 .

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΔΕΣΜΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Η οικογένεια των επιπέδων τα οποία τέμνονται σε κοινή ευθεία λέγεται αλυσική δεσμή επιπέδων.

Η κοινή αυτή ευθεία ονομάζεται αλυσ δεσμής.

$$\text{Πρώτο: Έστω επίπεδα } (\pi_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\pi_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Έστω ότι m τοιαύτα επίπεδα είναι m ευθεία (E) .

Έστω επίπεδο (π) συνιστά γέννη αλυσική δεσμή

$(\pi_1), (\pi_2) \in E$ έχει την κοινή

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$$\text{όπου } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ με } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

π.χ

Έστω $(\pi_1): 3x - 2y + 6z - 6 = 0$

$(\pi_2): x - y + z + 4 = 0.$

Να βρεθεί η εξίσωση του (π) που ανήκει στην αλυσική διεύθυνση των $(\pi_1), (\pi_2)$ που διέρχεται από το $P_1(-1, 3, 2)$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$(\pi): \lambda_1(3x - 2y + 6z - 6) + \lambda_2(x - y + z + 4) = 0, (1)$

, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$

$P_1 \in (\pi) \Rightarrow -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_2} (2)$

Λη (Από αυτό υποθέτω ότι
έχουμε ότι οι 2 δυν είναι εναπομείναντες)

Από $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, π.χ. έστω ότι $\lambda_1 \neq 0$
(από $\lambda_2 \neq 0$)

Η (1) από το (2) θα γίνει

$\frac{2}{3}\lambda_2(3x - 2y + 6z - 6) + \lambda_2(x - y + z + 4) = 0, \Rightarrow$

$\lambda_2(2x - \frac{4}{3}y + 4z - 4 + x - y + z + 4) = 0 \quad (\lambda_2 \neq 0) \Rightarrow$

$\boxed{3x - \frac{7}{3}y + 5z = 0} : (\pi)$

ΧΕΥΤΡΙΚΗ ΣΕΓΩΜ ΕΝΙΝΕΩΝ.

Εστω ενینهο $(\pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + D_1 = 0$.

$(\pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2z + D_2 = 0$

$(\pi_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3z + D_3 = 0$.

Διέρχονται από κοινό κοινικό
σημείο από $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ η επιγωμή:

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + \Gamma_1z + D_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + \Gamma_2z + D_2) + \lambda_3 (A_3x + B_3y + \Gamma_3z + D_3) = 0$$

Γέγνται χευτρική σεγωμ των $(\pi_1), (\pi_2), (\pi_3)$
στο το P_0 κέντρο της σεγωμς.

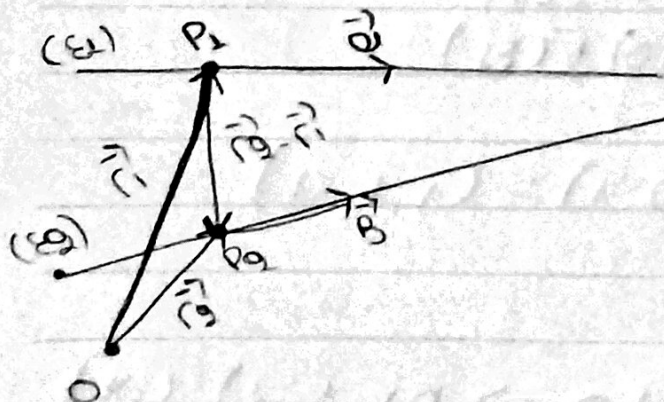
ΣΥΜΒΑΤΕΣ ΚΑΙ ΑΣΥΜΒΑΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ.

Ορισμός: Δο ευθείες λέγονται συμβατές
αν $\exists$ ενینهο το οποίο τις περιέχει.

Αν δεν υπάρχει λέγονται ασυμβατές.

Εστω ευθείες $(\epsilon_1): \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$

$(\epsilon_2): \vec{r} = \vec{r}_2 + \mu \vec{b}$.



Οι ευθείες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$
είναι συμβατές $\Leftrightarrow$
αν $\exists$ ενینهο που τις
περιέχει.

Εί το διάνυσμα $\vec{0}, \vec{B}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Εί το βέκτορ γινόμενο αυτών το ισούται με 0.

$$\Leftrightarrow (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{0}, \vec{B}) = 0$$

Εστω $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \vec{0} = (0_1, 0_2, 0_3)$
 και $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\begin{array}{l} \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \rightarrow \\ \vec{0} \rightarrow \\ \vec{B} \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{ccc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0_1 & 0_2 & 0_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow$$

ισούται και αναγκαία συνθήκη για να είναι 2 διάνυσμα συγγραμμικά.

π.χ (ε1): $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}, (ε2) \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$

όπου $\vec{0} = (2, 3, 1)$ και $\vec{B} = (3, 2, 2)$

Για την (ε1): $P_1(-1, 0, 1) \in (ε1),$

Για την (ε2): $P_2(0, 1, 0) \in (ε2)$

$$\Rightarrow \vec{P_1P_2} = (0 - (-1), 1 - 0, 0 - 1) = (1, 1, -1)$$

έλεγχος

(ε1), (ε2) $\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \right| = 8 \neq 0 \Rightarrow$ οι (ε1), (ε2) ανεξάρτητες.

ορίσας

$$(E): \begin{cases} x-3y+4z-1=0, & x-y-z-9=0 \end{cases}$$

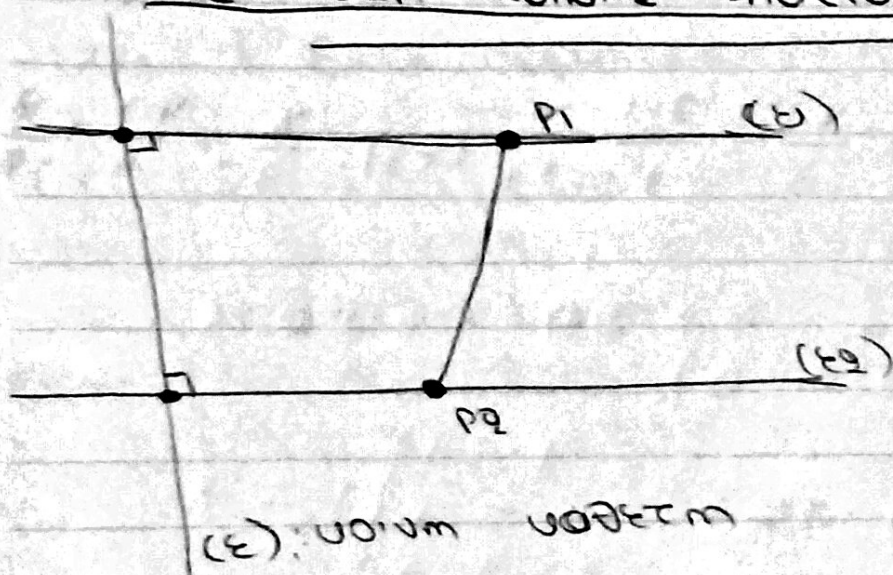
$$(E_2): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{6}$$

* $\vec{n}_1 = (9, -3, 4) \perp (E_1)$ και $\vec{n}_2 = (1, -1, -1) \perp (E_2)$
 και $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1, \vec{n}_2$
 $\Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (E_1), (E_2) \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (E)$

* $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ είναι ο διάνυσμα

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

(ΕΥΡΕΣΗ ΚΟΙΝΗΣ ΚΑΘΕΤΟΥ)



Έστω οι ασύμβατες επιπέδων (E), (E2)

Ελάχιστη απόσταση

$\vec{d}((E), (E_2)) = \text{το μέτρο της προβολής του } \vec{P_1P_2}$
 στην (E).

$$\left(\text{προβολή σε } \pi_{\vec{d}} \vec{B} = \frac{\langle \vec{d}, \vec{B} \rangle}{\langle \vec{d}, \vec{d} \rangle} \cdot \vec{d} \right) *$$

Το $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$ και $m(\epsilon) \perp (\epsilon), (\epsilon) \perp \vec{a}, \vec{b}$, άρα το $\vec{a} \times \vec{b} \parallel (\epsilon)$ και αντιστοίχως
 άρα $m(\epsilon) \perp \vec{a} \times \vec{b}$ άρα $\vec{a} \times \vec{b} \parallel (\epsilon)$ και αντιστοίχως
 το μέτρο της $\vec{a} \times \vec{b}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$

$$\text{Άρα } d = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$= \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Π.χ
 (ε): $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{2-1}{1}$, (εγ): $\frac{x}{3} = \frac{4-1}{2} = \frac{2}{1}$

Εδώ λοιπόν έχουμε ότι είναι ομογενές

$$P_1(-1, 0, 1), P_2(0, 1, 0)$$

$$\vec{P_1 P_2} = (1, 1, -1)$$

$$d = \frac{|\langle \vec{P_1 P_2}, \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{39}} = \frac{1}{\sqrt{39}}$$

ήτοι $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4, -1, -5)$$

$$\text{Άρα } d = \frac{|\langle \vec{P_1 P_2}, \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{8}{\sqrt{39}}$$

Ευρεση νοητής υσθεται τω 9 ευθυβοτων
ευθεων (ε);

(ε1): $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$, (ε2): $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$
(οι (ε1), (ε2) ειναι στο το προσημασμο π.χ. (x))
Η (ε) θα τμη βρισκουρε ως τομη των
επιπεδων (π1), (π2) οπου:

(π1): οριζεται το επιπεδο που περιεχει τμη (ε1)
υαι ("ειναι παραλληλο") περιεχει τμη (ε)

(π2): οριζεται το επιπεδο που περιεχει τμη (ε2)
υαι ("ειναι παραλληλο") περιεχει τμη (ε)

(π1): $P_1(-1, 0, 1) \in (\pi_1)$ αιφοι $\in (ε1)$
υαι $\vec{a} = (2, 3, 1) \in (\pi)$ υαυι $\in (ε1)$
υαι $\vec{a} \times \vec{b} = (4, -1, -5) \in (\pi)$ υαυι $\in (ε)$
ορα $\left| \begin{array}{ccc|c} x+1 & y & z-1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \dots \dots \dots$ ελιωωωω (π1)

(π2): $P_2(0, 1, 0) \in (\pi_2)$ αιφοι $\in (ε2)$
υαι $\vec{b} = (3, 2, 2) \in (\pi)$ υαυι $\in (ε2)$
υαι $\vec{a} \times \vec{b} = (4, -1, -5) \in (\pi)$ υαυι $\in (ε)$
ορα $\left| \begin{array}{ccc|c} x & y-1 & z & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \dots \dots \dots$ ελιωωωω (π2)

ορα (ε): $\{ \text{ελιωωωω } (\pi_1), \text{ελιωωωω } (\pi_2) \}$

* Το επιπεδο υαι το διωνυμωτο ειναι στο
το προσημασμο π.χ. (x)